Региональный этап всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014/2015 учебном году

Мурманская область

Шифр участника: М-09-03, М2-09-05

Класс: 09

Количество баллов: 34

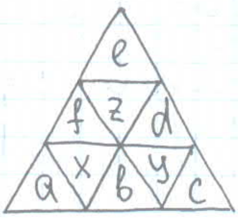
Результат участия: победитель

М-09-03

1	2	3	4
5	1	7	0

Задача 9.3

Рассмотрим получившуюся в результате всех ходов ситуацию, обозначив получившиеся числа буквами:



Пусть клетка называется так же, как и получившееся в ней число (т.е. самая нижняя и левая клетка — это клетка a и т.д.)

Если мы изменяем число в клетке a на какую-то величину, то на такую же величину изменяется и число в клетке x, так как клетка a граничит только с клеткой x. То же самое с парами клеток c и y и e и z. Если мы изменяем число в клетке f на какую-то величину, то на такую же величину изменяется и сумма чисел в клетках z и x, так как клетка f граничит только с клетками z и x. То же самое с тройками клеток d и $z+y$ и b и $x+y$. Значит, изменение суммы чисел в клетках a, b, c, d, e и f равно изменению суммы чисел в клетках x, y и z. Короче это можно объяснить тем, что клетки a, b, c, d, e и f не граничат друг с другом, а значит, изменяют только клетки

x, y и z.

Но в начале $x+y+z = a+b+c+d+e+f = 0$, т.к. изначально в клетках записаны нули.

Следовательно, и в конце $x+y+z = a+b+c+d+e+f$

Пусть $x+y+z = 3n+M$, а $a+b+c+d+e+f = 6n+N$, где $M+N = 1+2+\ldots+8 = 36$

Тогда, $M = 36-N$.

Получаем: $3n+36-N = 6n+N$

$$3n = 36-2N$$

$$n = 12 - \frac{2N}{3}$$

К тому же $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow N \vdots 3$

Но N - это сумма шести чисел из 9 чисел от 0 до 8 =>

=> $N \geq 0+1+2+3+4+5 = 15$

и $N \leq 8+7+6+5+4+3 = 33$

$$\boxed{15 \leq N \leq 33}$$

В итоге

$$\begin{cases} 15 \leq N \leq 33 \\ n \in \mathbb{N} \\ n = 12 - \frac{2N}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 15 \\ n = 2 \end{cases}$$

Так как при больших значениях N, кратных 3, $n \notin \mathbb{N}$

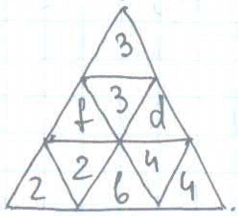
Значит, Петя сможет всё сделать только при $n = 2$

M-09-03

Осталось привести пример:

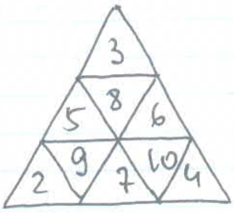
1. К клеткам a и x прибавляем по 2 единицы; к c и y – по 4; к e и z – по 3

Получаем:



2. Теперь к клеткам x и b прибавляем по 7 единиц; к d и y – по 6; к f и z – по 5

Получаем:



3. В треугольнике есть все числа от $n=2$ до $n+8=10$

Ответ: только при $n=2$

Задача 9.1

1. Первую фразу сказали все, значит, у каждого рыцаря число больше, чем у соседей, т.к. рыцари не врут. Значит, вторую фразу рыцари сказать уже не могли.

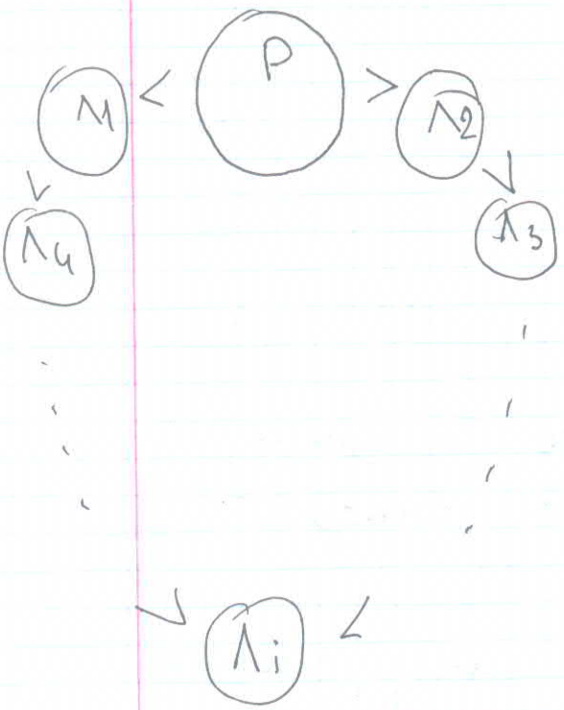
2. Лжецы первой фразой соврали, значит нет лжецов, у которых число больше, чем у каждого из соседей. Но если число лжеца меньше, чем у каждого из его соседей, то он

не мог сказать вторую фразу, т.к. ему пришлось бы сказать правду.

3. Значит, обе фразы могли сказать только лжецы, с одной стороны у которых сосед с бо́льшим числом, а с другой – с меньшим. Так как они оба раза солгали.

4. Попробуем рассадить всех людей, чтобы среди них было максимальное кол-во лжецов из пункта 3 (это и есть нужное нам k)

Среди всех людей есть хотя бы один рыцарь. Его число больше соседних. Посадим с обеих сторон от него нужных лжецов. По условию пункта 3 у этих лжецов должны быть соседи с меньшими числами. Посадим и их тоже. Далее будем выстраивать цепочку аналогично. Получается, что, двигаясь по часовой стрелке от рыцаря, мы идём по знакам „больше", а если против часовой стрелки – по знакам „меньше".



М-09-03

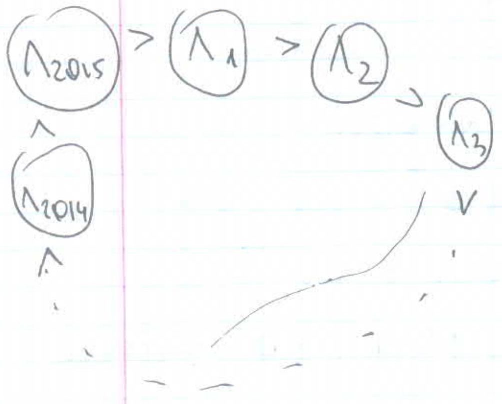
Значит, где-нибудь за столом обязательно найдётся такой лжец, число которого будет меньше обоих соседних, т.е. он не будет удовлетворять условие пункта 3. Но он будет просто лжецом, который соврал первой фразой и больше не говорил.

Получается, что „впихнуть" за стол 2014 нужных лжецов невозможно, т.к. в процессе „впихивания" мы натнёмся на этого неподходящего лжеца, описанного выше (лжец Лi на рис.)

Зато „вычеркнуть" 2013 нужных лжецов вполне реально, если заменить ~~на~~ лжеца $Л_i$ на лжеца из пункта 2.

Получается, что наибольшее k равно 2013 (при условии, что обязательно наличие хотя бы одного рыцаря).

Если же наличие рыцарей не обязательно, то все 2015 человек могут быть нужными лжецами, т.к. все знаки между ними будут одинаковыми:



Задача 9.2

1. Пример 3 интересных чисел

числа	2	3	4	5	6
сумма цифр	2	3	4	5	6
	пр.	пр.		пр.	

$\Downarrow$

2, 3 и 5 - интересные числа

2. Докажем, что для того, чтобы в ряду было больше трёх интересных чисел, не менее четырёх сумм цифр должны быть нечётными.

Доказательство:

1) Если все суммы чётные, то не менее четырёх из них отличны от 2 и чётны, т.е. не простые => => интересных чисел не больше трёх

2) Если все суммы, кроме одной, чётные, то не менее трёх из них чётны и отличны о 2, т.е. не простые => интересных чисел

не больше трёх

3) Если все суммы, кроме двух, чётные, то не менее двух из них чётны и отличны от 2, т.е. не простые => интересных чисел не больше трёх

3. Если из пяти чисел хотя бы у двух одинаковая чётная чётность, то среди этих пяти чисел не может быть четырёх нечётных.

4. Рассмотрим случай, когда наибольшее из пяти чисел не превосходит $10k+9$, где k - какое-нибудь целое неотрицательное число. Тогда все пять чисел отличаются только числом единиц, а значит, если у меньшего числа сумма цифр равна a, то у остальных: $a+1$; $a+2$; $a+3$; $a+4$. Но среди этих сумма a; $a+2$ и $a+4$ обладают одинаковой чётной чётностью,

значит, среди сумм нет четырёх нечётных (утверждение п. 3), и интересных чисел не больше трёх (утв. п. 2)

5. Рассмотрим случай, когда среди пяти чисел есть число, равное $10k+9$, где k - какое-нибудь целое неотриц. число, и это число не наибольшее. Тогда есть числа, отличающиеся не только числом единиц.

Пусть число $10k+9 = x$, а его сумма цифр $= a$. Тогда сумма цифр $x+1$ ого числа $= a-(8+9n)$, где n - кол-во девяток в конце числа x.

~~Рассмотрим ряды из пяти чисел от x до $x+4$ и от $x-1$ до $x+3$. В этих рядах есть три последовательных числа $x+1$, $x+2$ и $x+3$, которые~~

~~отличаются только числом единиц~~

~~а) Рассмотрим ряд чисел от x до $x+4$. Среди них есть 4 последовательных числа, отличающихся только числом единиц, значит, среди сумм этих 4 чисел есть две чётные, значит, среди сумм нет четырёх нечётных (п. 3), и интересных чисел не больше трёх.~~

~~б) Рассмотрим ряд чисел~~

а) Рассмотрим ряд чисел от $x-3$ до $x+1$. Числа от $x-3$ до x - подряд идущие и отличаются только числом единиц, причём среди сумм их цифр не может быть двойки, значит, нечётных сумм не больше трёх, значит, интересных чисел не больше трёх.

б) Рассмотрим случай, когда среди пяти чисел есть 11:

$\left.\begin{matrix} 7;8;9;10;11 \\ 8;9;10;11;12 \end{matrix}\right\} \to$ 9 - не простое; 8 - не простое $\Rightarrow$ интересных чисел не больше трёх

~~8~~ 9; 10; 11; 12; 13 $\to$ 9 - не простое; $1+0=1$ - не простое $\Rightarrow$ инт. чисел не больше трёх

10; 11; 12; 13; 14 $\to$ $1+0=1$ - не прост.; $1+3=4$ - не прост. $\Rightarrow$ инт. чисел не больше трёх

11; 12; 13; 14; ~~14~~15 $\to$ $1+3=4$ - не прост.; $1+5=6$ - не прост. $\Rightarrow$ инт. чисел не больше трёх

в) Рассмотрим случай, когда среди пяти чисел есть 10:

$\left.\begin{matrix} 6;7;8;9;10 \\ 7;8;9;10;11 \\ 8;9;10;11;12 \\ 9;10;11;12;13 \end{matrix}\right\} \to$ 9 - не прост.; $1+0=1$ - не прост. $\Rightarrow$

=> инт. чисел не больше трёх

10; 11; 12; 13; 14; 15 - случай из б

г) Рассмотрим ряд от x до $x+4$. Числа от $x+1$ до $x+4$ - послед. и отличаются числом единиц, причём нет сумм цифр, равных двум (б и в), значит, нечётных сумм не больше трёх, значит, интересных чисел не больше трёх.

д) В ряду от $x-2$ до $x+2$ из чисел $x-2$ и $x-1$ одна сумма цифр отличается от a на чётную величину, а другая - на нечётную. Аналогично с числами $x+1$ и $x+2$. Получается, что среди чисел от $x-2$ до $x+2$ есть две чётные суммы, значит, интересных чисел не больше трёх.

г) Среди чисел $x-1$ и x есть чётная сумма цифр и среди чисел $x+1$; $x+2$ и $x+3$ есть чётная сумма цифр $\Rightarrow$ в ряду от $x-1$ до $x+3$ есть 2 чётные суммы цифр $\Rightarrow$ интересных чисел не больше трёх

Рассмотрели все виды рядов.

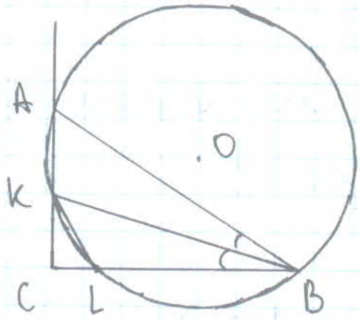
Итак, мы рассмотрели все случаи из пяти чисел и доказали, что в любом случае интересных чисел не больше трёх.

Ответ: наибольшее кол-во интересных чисел среди пяти подряд идущих натур. числа - 3

M2-09-05

5	6	7	8
7 ~~2~~	7	7	0

Задача 9.6



Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90°$;
BK – биссектриса;
около $\triangle ABK$ описана
окр. (O; OA);
окр. $\cap$ BC в L
Д-ть: $CB + CL = AB$

Д-во

1. $\angle ABK = \angle KBL \Rightarrow AK = KL$, т.к. равные вписанные углы опираются на равные хорды.
2. По теореме Пифагора:

$KL^2 = CL^2 + CK^2$

$KL = \sqrt{CL^2 + CK^2}$

3. $\left.\begin{array}{l} AK = KL \\ KL = \sqrt{CL^2+CK^2} \end{array}\right| \Rightarrow AK = \sqrt{CL^2+CK^2}$

4. $CK = AC - AK = AC - \sqrt{CL^2 + CK^2}$

$AC - CK = \sqrt{CL^2 + CK^2}$

$AC^2 - 2 \cdot AC \cdot CK + \cancel{CK^2} = CL^2 + \cancel{CK^2}$

$2 \cdot AC \cdot CK = AC^2 - CL^2$

$CK = \dfrac{AC^2 - CL^2}{2 \cdot AC}$

5. По свойству степени точки относительно окружности: $CB \cdot CL = AC \cdot CK$

$\left.\begin{array}{l} CB \cdot CL = AC \cdot CK \\ CK = \dfrac{AC^2 - CL^2}{2 \cdot AC} \end{array}\right| \Rightarrow 2 \cdot CB \cdot CL = AC^2 - CL^2$

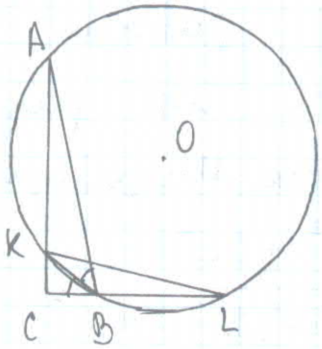
6. $2 \cdot CB \cdot CL + CB^2 + CL^2 = (CB + CL)^2 = AC^2 - \cancel{CL^2} + CB^2 + \cancel{CL^2}$

$\left.\begin{array}{l} (CB + CL)^2 = AC^2 + CB^2 \\ \text{Но по теореме Пифагора} \\ AC^2 + CB^2 = AB^2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} (CB+CL)^2 = AB^2 \\ CB + CL = AB \end{array}$

ЧТД

М2-09-05

Рассмотрим V случай:
если точка L лежит
на продолжении
луча CB:



Д-ть: CB+CL=AB

Д-во

1. Пусть $\angle ABK = \alpha$; BK - биссектриса $\Rightarrow \angle CBK = \alpha$
2. $\angle KBL = 180^\circ - \angle CBK = 180^\circ - \alpha$
3. Если вершина вписанного угла, опирающегося на KL, будет лежать на другой дуге KL, нежели точка B, то величина этого угла будет равна α.

Построим такой угол KFL.
Чугольник KFLB вписан в окружность.
$\Rightarrow \angle KBL + \angle KFL = 180^\circ$

$$\angle KFL = 180^\circ - \angle KBL = 180^\circ - 180^\circ + \alpha = \alpha$$

4. $\angle KFL = \alpha$, $\angle ABK = \alpha$ $\Rightarrow \angle KFL = \angle ABK \Rightarrow AK = KL$, т.к. равные вписанные углы опираются на равные хорды.

5. По теореме Пифагора:

$$KL^2 = CK^2 + CL^2$$

$$KL = \sqrt{CK^2 + CL^2}$$

6. $AK = KL = \sqrt{CK^2 + CL^2}$

7. $CK = AC - AK = AC - \sqrt{CK^2 + CL^2}$

$$AC - CK = \sqrt{CK^2 + CL^2}$$

$$AC^2 - 2 \cdot AC \cdot CK + \cancel{CK^2} = \cancel{CK^2} + CL^2$$

$$CK = \frac{AC^2 - CL^2}{2 \cdot AC}$$

8. По свойству степени точки относительно окружности: $CL \cdot CB = AC \cdot CK$

M2-09-05

$$\left.\begin{array}{l} CB\cdot CL = AC\cdot CK \\ CK = \dfrac{AC^2 - CL^2}{2\cdot AC} \end{array}\right| \Rightarrow 2CB\cdot CL = AC^2 - CL^2$$

9. $2\cdot CB\cdot CL + CB^2 + CL^2 = (CB+CL)^2 = AC^2 - \cancel{CL^2} + CB^2 + \cancel{CL^2}$

$(CB+CL)^2 = AC^2 + CB^2$

Но по теореме Пифагора:

$AC^2 + CB^2 = AB^2$

$\Rightarrow (CB+CL)^2 = AB^2$

$CB + CL = AB$

чтд

Задача 9.5

~~Возьмём момент τ, в который рейтинг последний раз принял целочисленное значение (т.е. после следующего~~

1. Возьмём момент τ, перед которым рейтинг последний раз уменьшился на единицу (т.е. после следующего голоса рейтинг изменился как угодно, кроме уменьшения на 1)

Пусть в момент τ n – это сумма оценок, а k – кол-во голосов, а x – целочисленное значение рейтинга:

$$\tau: \quad \frac{n}{k} = x \Rightarrow n = kx$$

Если шаг – это добавление одного голоса, то за шаг до τ k было меньше на 1; x было больше на 1; а n было меньше на a, где a – оценка нового голосовавшего:

M2-09-05

$\tau - 1: \quad \dfrac{n-a}{k-1} = x+1$

$$\left.\begin{array}{l} n - a = kx + k - x - 1 \\ n = kx \end{array}\right| \Rightarrow -a = k - x - 1$$

$$a = x + 1 - k \quad (1)$$

2. Пусть N - кол-во проголосовавших после момента T.

~~[illegible]~~

В момент T уже был хотя бы один голос, значит, если k - кол-во голосов в последний момент выполнения условия (момент τ), то N не больше k - 1.

Кроме этого, рейтинг в момент

T не больше 10, а на каждом шаге рейтинг уменьшается на 1. Поскольку шаг – это добавление <u>одного</u> голоса, то, если x – рейтинг в последний момент выполнения условия (момент τ), N не больше 10 − x.

Имеем:

$$\begin{cases} N \le 10 - x \\ N \le k - 1 \end{cases}$$

Вернёмся к выражению 1:

$$\left.\begin{array}{l} a = x + 1 - k \\ a \in \mathbb{Z} \\ a \ge 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x + 1 \ge k \\ x \ge k - 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} N \le 10 - x \\ x \ge k - 1 \end{array}\right| \Rightarrow N \le 10 - k + 1 = 11 - k$$

$$\begin{cases} N \le 11 - k \\ N \le k - 1 \end{cases}$$

M2-09-05

Перебрав все k от 1 до 11 (т.к. $N \geq 0$) получаем, что максимальное значение $N = 5$ при $k = 6$.

Тогда, в момент T кол-во голосов $= k - N = 6 - 5 = 1$.

Проверим:

T: $\frac{10}{1} = 10$

След. шаг: $\frac{10+8}{1+1} = \frac{18}{2} = 9 = 10 - 1$

След. шаг: $\frac{18+6}{2+1} = \frac{24}{3} = 8 = 9 - 1$

След. шаг: $\frac{24+4}{3+1} = \frac{28}{4} = 7 = 8 - 1$

След. шаг: $\frac{28+2}{4+1} = \frac{30}{5} = 6 = 7 - 1$

След. шаг: $\frac{30+0}{5+1} = \frac{30}{6} = 5 = 6 - 1$

после T проголосовало 5 человек, и все условия выполнены

Итак, после момента T могло проголосовать не более 5ти человек.

Задача 9.7

Дано: $a^2+b^2+c^2+d^2=4$

Д-ть: $(2+a)(2+b) \geq cd$

1. Докажем, что $cd \leq \frac{(c+d)^2}{4}$

$\frac{(c+d)^2}{4} \geq cd$

$(c+d)^2 \geq 4cd$

$c^2+2cd-4cd+d^2 \geq 0$

$(c-d)^2 \geq 0$

чтд

2. Если $(2+a)(2+b) \geq \frac{(c+d)^2}{4}$, то

$(2+a)(2+b)$ точно $\geq cd$

3. Докажем, что $(2+a)(2+b) \geq \frac{(c+d)^2}{4}$

$$(2+a)(2+b)-\frac{(c+d)^2}{4}=\frac{16+8a+8b+4ab-(c+d)^2}{4}$$

$$16+8a+8b+4ab-c^2-d^2-2cd=$$

$$=4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+8a+8b+4ab-c^2-d^2-2cd=$$

$$=4a^2+4b^2+3c^2+3d^2+4ab+8a+8b-2cd=$$

$$=2a^2+4ab+2b^2+2(c^2+d^2+a^2+b^2)+c^2-2cd+d^2+$$

$$+8(a+b)=2(a+b)^2+8+(c-d)^2+8(a+b)=$$

$$=8+(c-d)^2+2(a+b)(a+b+4)$$

Пусть $a+b=x$

Проанализируем функцию $y=2x(x+4)$

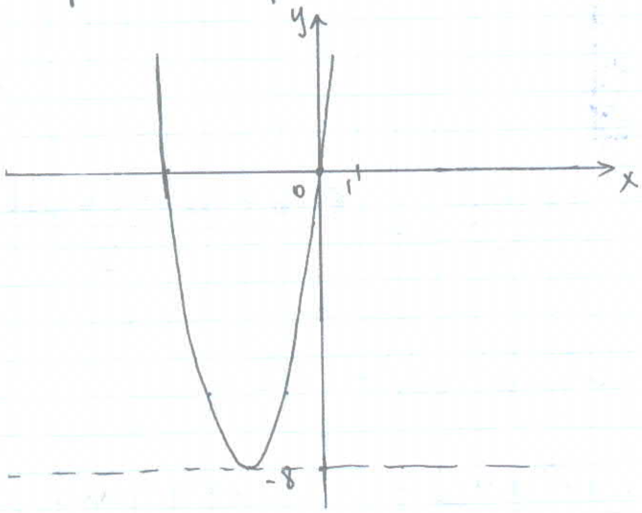
$y = 2x(x+4)$

$y = 2x^2 + 8x$

$y = 2x^2 + 8x + 8 - 8$

$y = 2(x+2)^2 - 8$

Построим график этой функции



Видим, что при любых x $y \geq -8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a+b)(a+b+4) \geq -8$

Получаем:

$$8 + \underbrace{(c-d)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2(a+b)(a+b+4)}_{\geq -8} \geq 0$$

M2-09-05

Из этого следует, что $16+8a+8b+4ab-(c+d)^2 \geq 0$

Следовательно, $(2+a)(2+b)-\frac{(c+d)^2}{4} \geq 0$

Значит, $(2+a)(2+b) \geq \frac{(c+d)^2}{4}$

$$\left.\begin{array}{l}(2+a)(2+b) \geq \frac{(c+d)^2}{4} \\ \frac{(c+d)^2}{4} \geq cd\end{array}\right| \Rightarrow (2+a)(2+b) \geq cd$$

чтд

Задача 9.8

1. Если в последовательности только натуральные числа, и любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1, то это просто последовательность из 100 последовательных натуральных чисел.
2. Поскольку в последовательности должна присутствовать тройка, то таких последовательностей всего

три: от 1 до 100; от 2 до 101; от 3 до 102. Потому что 1 - самое маленькое натуральное число, а с чисел, больших 3, начинать последовательность нельзя, иначе в последовательности не будет тройки.

Ответ: Пете придётся выписать три последовательности